ILP Modell Tennis

Fabian Leuthold

Inhalt

1 Problembeschreibung

Zu Beginn des Tennisspiels im Freien müssen immer erst die Feldlinien gereinigt werden. Der Besen ist häufig an einer von zwei typischen Orten platziert. Folgende Fragen stehen im Interesse der Betrachtung:

- **Frage 1:** In welcher Reihenfolge sollen die einzelnen Abschnitte der Feldlinien gereinigt werden, damit der zurückgelegte Weg möglichst kurz ist, wenn die Putztour beim Besen starten und enden soll?

- **Frage 2:** Ist eine bestimmte Platzierung des Besens (beim Netz oder beim Corner) für die daraus resultierende Tour zu bevorzugen?

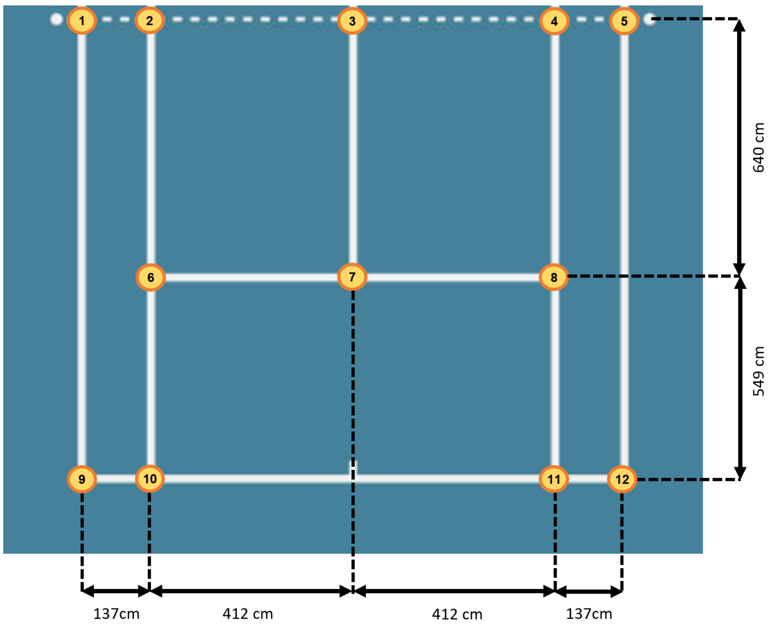

Abbildung 1: Masse der Markierungen im Tennisfeld

Die gesamte Länge der zu reinigenden Feldlinien beträgt 7318 cm:

$$l_{tot} = 4 \cdot (549 + 640) + 640 + 2 \cdot (2 \cdot 412 + 137) = 7318$$

2 ILP Modell

2.1 Entscheidungsvariablen und Hilfsvariablen

X_{ijk}: Binäre Entscheidungsvariable, die angibt, ob im i-ten Schritt vom Knoten j zum Knoten k gereinigt wird (=1) oder nicht (=0).

2.2 Sets / Indizes

I: Die Menge der einzelnen Schritte zum Ablaufen des Liniennetzes: $I = \{1, ..., n\}$.

$i \in I$: Der i-te Schritt aus der Menge von Schritten I, die nötig sind, um das Liniennetz abzuschreiten.

N: Die Menge der Knoten des Graphen-Netzwerks, welches das Tennisfeld beschreibt: $N = \{1, ..., 12\}$.

$(j, k) \in N$: Ein einzelnes Liniensegment, begrenzt durch die anliegenden Knoten j und k.

2.3 Parameter

n: Länge der Sequenz abzulaufender Wegstücke. Dieser Parameter wird heuristisch bestimmt, um die minimale Anzahl nötiger Wegstücke zu ermitteln, die abgelaufen werden müssen, um das gesamte Liniennetz reinigen und zum Startpunkt zurückkehren zu können. Die Heuristik startet bei $n = |N|$ und erhöht in jeder Iteration n um 1, bis für das Problem eine Lösung gefunden werden kann.

W_{jk}: Binärer Parameter der angibt, ob von Knoten j zum Knoten k gegangen werden kann (=1), 0 sonst.

M_{jk}: Binärer Parameter der angibt, ob das Wegstück von Knoten j zum Knoten k gereinigt werden muss (=1), 0 sonst.

D_{jk}: Reellwertiger Parameter der angibt, wie lange das Wegstück zwischen den Knoten j zum Knoten k ist (z.B. in cm).

s: Index des Startknotens $s \in N$, wo mit Reinigen begonnen werden muss.

2.4 Constraints

- **C1: Nur zulässige Nachfolgeknoten erlauben**
  $\forall(j, k) \in (N \times N) : \sum_i X_{ijk} \leq n \cdot W_{jk}$

  Dieser Constraint stellt sicher, dass nur zulässige Nachfolgeknoten erlaubt werden.

- **C2: In jedem Schritt exakt ein Wegstück ablaufen**
  $\forall i \in \{1..n\} : \sum_{(j,k)} X_{ijk} = 1$

  Dieser Constraint stellt sicher, dass in jedem Schritt nur genau ein Wegstück in einer bestimmten Richtung abgelaufen werden darf.

- **C3: Alle zu reinigenden Wegstücke reinigen**
  $\forall(j, k) \in (N \times N) : \sum_i X_{ijk} + X_{ikj} >= M_{jk}$

  Dieser Constraint stellt sicher, dass - wenn das Wegstück zwischen den Knoten i und j gereinigt werden muss, dass es mindestens einmal in einer beliebigen Richtung abgelaufen wird.

- **C4: Anfangspunkt beim Startknoten**
  $\sum_k X_{1sk} = 1$

  Dieser Constraint stellt sicher, dass im ersten Schritt vom Startknoten zu einem anderen (aufgrund C1 zulässigen, erreichbaren) Knoten gegangen wird.

- **C5: Endpunkt beim Startknoten**
  $\sum_k X_{nks} = 1$

  Dieser Constraint stellt sicher, dass im letzten Schritt von einem (aufgrund C1 zulässigen, erreichbaren) Knoten zum Startknoten gegangen wird.

- **C6: Zusammenhängender Pfad**
  $\forall i \in \{1, ..., n-1\}, k \in N : \sum_j X_{ijk} = \sum_j X_{i+1,kj}$

  Dieser Constraint stellt sicher, dass die Teilstrecken der Sequenz einen zusammenhängenden Pfad darstellen.

2.5 Zielfunktion

Die Zielfunktion minimiert die Strecke, die abzulaufen ist, um die nötigen Teilstrecken zu reinigen.

$$min \quad \sum_{ijk} X_{ijk} \cdot D_{jk}$$

3 Lösung

Das Modell liefert für beide Besen-Standorte dasselbe Optimum. Nachfolgend die Visualisierung je einer optimalen (minimalen) Lösung.

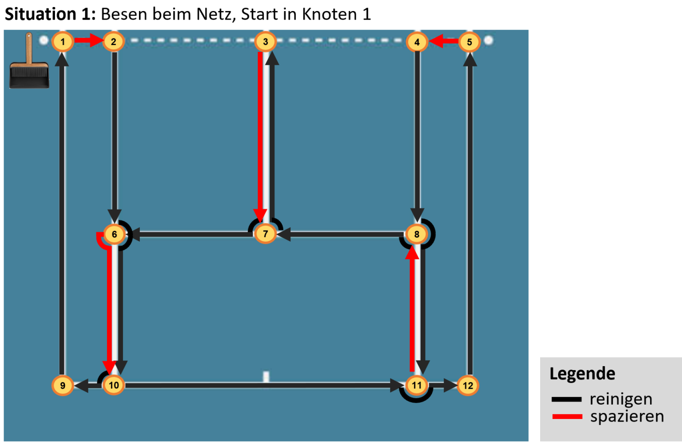

Abbildung 2: Optimale Lösung Besen beim Netz

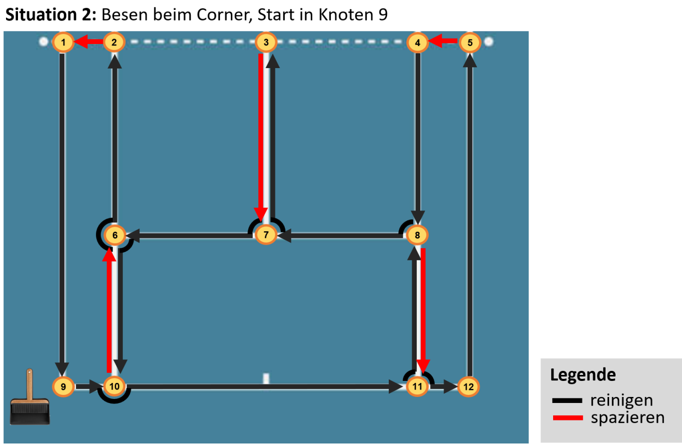

Abbildung 3: Optimale Lösung Besen beim Corner

In beiden Fällen ist die gesamthaft zurückgelegte Distanz identisch. Sie berechnet sich anhand der Summe der zu reinigenden Teilstrecken (schwarz) und den spazierten Teilstrecken, bei denen nicht gereinigt wird (rot):

$$l_{opt} = 7318 + 2 \cdot 549 + 640 + 2 \cdot 137 = 9330$$

M.a.W: Wir müssen also mindestens 93.3 Meter zurücklegen, wenn wir die Feldlinien von einer Feldhälfte reinigen wollen. Durch unterschiedliche Wahl des Besenstandortes kann geprüft werden, ob sich unterschiedliche Platzierungen auf das gefundene Optimum positiv auswirken. Das ist aber nicht der Fall. Die minimal erforderliche Distanz von 93.3 m kann nicht unterschritten werden.